

2021 年欣榮圖書館數學比賽（國中組）

注意事項. 本試題共 6 題，每題配分標於題目中，滿分 100 分。

1. 有一隻青蛙一開始位於數線上的原點（數線的正向朝右），青蛙第 1 步朝左或朝右跳 1 個單位長，即青蛙跳第 1 步之後會在數線上的坐標 1 或 -1 的位置上；第 2 步朝左或朝右跳 2 個單位長；第 3 步朝左或朝右跳 3 個單位長……；第 n 步朝左或朝右跳 n 個單位長。
 - (i) (4 分) 若青蛙一開始位於原點且總共跳了 2 步，則它位於數線上的坐標為何？
 - (ii) (6 分) 若青蛙一開始位於原點且總共跳了 5 步，它位於數線上的坐標 5，那麼它的跳躍方式一共有幾種呢（包含以下例子）？例如：第 1 步到第 4 步皆朝右跳，第 5 步則朝左跳。
 - (iii) (15 分) 若青蛙一開始位於原點且總共跳了 2021 步，則最後青蛙是否可能恰回到原點呢？請完整說明你的理由。

【解】

- (i) 青蛙總共跳了 2 步，所以它位於數線上的坐標可能為
 $1 + 2 = 3$ 、 $1 - 2 = -1$ 、 $-1 + 2 = 1$ 、 $-1 - 2 = -3$
一共 4 個可能。

- (ii) 將青蛙跳躍轉換成以下算式

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$$

\square 內填入“-”表示朝左跳、填入“+”表示朝右跳

考慮 $+1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

每將一個數 x 前的 $+$ 改成 $-$ 後，其和會減少 $2x$ ，可得青蛙朝左跳的總步數為 $(15 - 5) \div 2 = 5$ 步，其跳躍方式有 3 種，如下：

$$+1 + 2 + 3 + 4 - 5 \quad \text{與} \quad -1 + 2 + 3 - 4 + 5 \quad \text{與} \quad +1 - 2 - 3 + 4 + 5$$

- (iii) $+1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 2021 = \frac{2022 \times 2021}{2} = 1011 \times 2021$ 為奇數，因為每將一個數 x 前的 $+$ 改成 $-$ 後，其和會減少 $2x$ ，奇數減去偶數必為奇數，奇偶性不變，又 0 是偶數，因此無論青蛙如何跳躍，皆不可能恰好回到原點。



2. 把由 1 開始的正整數連續不間斷地依序由左而右併排寫成一列，形成一個 69 位的數如下所示，則

123456789101112131415161718192021 ...

69 位

- (i) (5 分) 最後寫下來的兩位數為何？
(ii) (10 分) 此 69 位數除以 11 的餘數為何？

【解】

- (i) 數字 1 到 9 佔去了 9 位， $69 - 9 = 60$ ，即表示兩位數自 10 開始用去了 $60 \div 2 = 30$ 個數字，即表示最後寫下來的兩位數為 39。

- (ii) 此 69 位數為

123456789101112131415161718192021 ... 3839

考慮 11 的倍數辨別法可得

奇數位數字的和為

$$[(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9) \times 3] = 160$$

偶數位數字的和為

$$[(2 + 4 + 6 + 8) + (1 + 2 + 3) \times 10] = 80$$

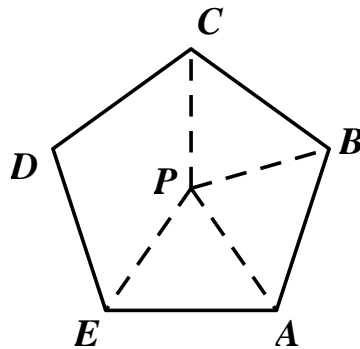
$$(160 - 80) \div 11 = 7 \dots 3$$

故此 69 位數除以 11 的餘數為 3。



3. (15 分) 如下圖，欣榮會議室內有五個座位 A 、 B 、 C 、 D 、 E ，構成一個邊長為 1.5 公尺的正五邊形，若在正五邊形的內部放置主席座位 P 使得 P 、 A 、 E 點構成一個正三角形 (註：圖形並未依照正確比例繪製)。

在冠狀病毒 COVID-19 防疫期間，規定室內社交距離為相距 1.5 公尺以上(含)。在不考慮座位本身大小下，座位間的距離 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} 是否符合社交距離規定呢？請完整說明你的理由。



【解】

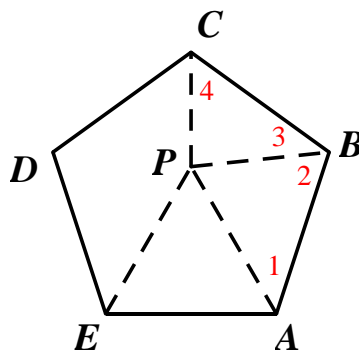
如下圖

(i) (3 分) 因為 $\triangle PAE$ 是正三角形，所以 $\overline{PA} = \overline{AE} = 1.5$ (公尺)， \overline{PA} 符合社交距離規定。

(ii) (4 分) 在 $\triangle PAB$ 中， $\angle 1 = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$ ，又 $\overline{PA} = \overline{AE} = \overline{AB}$ ，可得 $\angle 2 = 66^\circ$ ，所以 $\overline{PA} > \overline{PB}$ (大角對大邊)，故 $\overline{PB} < 1.5$ (公尺)，不符合社交距離規定。

(iii) (8 分) 在 $\triangle PBC$ 中， $\angle 3 = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$ ，又 C 、 P 點在 \overline{AE} 的中垂線上，所以 \overline{PC} 是 $\angle BCD$ 的角平分線，則 $\angle 4 = 108^\circ \div 2 = 54^\circ$ 。因為 $\angle 4 > \angle 3$ ，所以 $\overline{PB} > \overline{PC}$ (大角對大邊)， $\overline{PC} < 1.5$ (公尺)，不符合社交距離規定。

故只有 \overline{PA} 符合社交距離的規定。



4. 將相同的數之連乘可用乘方形式 a^b 表示，其中 a 稱為底數， b 稱為指數。規定一種操作程序如下：先寫下任意大於 1 的整數 n ，並將其寫成標準分解式 $n = a_1^{b_1} \times a_2^{b_2} \times \dots \times a_n^{b_n}$ ，其中對於 $i = 1, 2, \dots, n$ ，皆有 $b_i > 1$ ，再把標準分解式中的底數與指數依序寫下來而得到新的數字 $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n$ ，這樣稱為一次操作。

例如：一開始寫下 162，再將 162 寫成標準分解式可得 2×3^4 ，經過一次操作後得到新的數字 234；同樣地，我們再將數字 234 寫成標準分解式 $2 \times 3^2 \times 13$ ，再經過一次操作後得到新的數字 23213。當然，我們會發現質數不管經過幾次操作都是自己本身。

(i) (4 分) 阿榮一開始寫下 4，經過若干次前述操作後得出質數 p ，則 p 的值為何？

(ii) (6 分) 阿欣一開始寫下大於 1 的整數 x ，經過若干次前述操作後得出質數 23，則 x 所有可能的值為何？

【解】

(i) $4 = 2^2$ ，經過第 1 次操作後得到 22； $22 = 2 \times 11$ ，經過第 2 次操作後得到 211，因為 211 是質數，所以 $p = 211$ 。

(ii) 我們反項思考這個問題，什麼樣的標準分解式經過操作後會得到 23？顯然，只有三種 2^3 、 2×3 與質數 23 本身

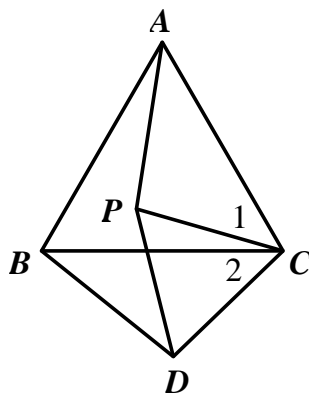
(a) $2^3 = 8$ 。什麼樣的標準分解式經過操作後會得到 8 呢？答案只有 8。

(b) $2 \times 3 = 6$ 。什麼樣的標準分解式經過操作後會得到 6 呢？答案只有 6。

故 $x = 6, 8, 23$ 。



5. 如下圖，平面上有 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PCD$ ，它們均為正三角形（註：圖形並未依照正確比例繪製），則
- (i) (5 分) 請完整說明 $\overline{PA} = \overline{BD}$ 的理由。
- (ii) (10 分) 若 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ ，則 $\angle BPC$ 的度數為何？



【解】

- (i) 在 $\triangle APC$ 和 $\triangle BDC$ 中， $\overline{AC} = \overline{BC}$ 、 $\overline{PC} = \overline{DC}$ ， $\angle 1 + \angle PCB = 60^\circ = \angle 2 + \angle PCB$ ，可得 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以 $\triangle APC \cong \triangle BDC$ (SAS 全等)，故 $\overline{PA} = \overline{BD}$ 。
- (ii) 連接 \overline{PB} ，在 $\triangle BPD$ 中， $\overline{BD} = \overline{PA}$ 、 $\overline{PD} = \overline{PC}$ ，又 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ ，可得 $\overline{BD}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ ，因此 $\angle BPD = 90^\circ$ ，故 $\angle BPC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ 。



6. 以下是兩道有關一元二次方程式的問題，請你仔細閱讀後進行思考與作答。

(i) (5 分) 若方程式 $x^2 - 24x + p = 0$ 的兩根 a 和 b 皆為質數且 $a < b$ ，則 p 所有可能的值為何？

(ii) (15 分) 若方程式 $x^2 + (2k + 9)x + (k + 38) = 0$ 的兩根均為質數，其中 k 為整數，則 k 的值為何？

【解】

(i) 由根與係數關係可得 $a + b = 24$ 、 $ab = p$ ，又 a 和 b 皆為質數且 $a < b$ ，所以 $(a, b) = (5, 19)$ 、 $(7, 17)$ 、 $(11, 13)$ ，故 $p = 95, 119, 143$ 。

(ii) {解一}

令方程式的兩根為 a 和 b 且 $a \leq b$ 。

由根與係數關係可得 $a + b = -2k - 9$ 、 $ab = k + 38$ ，考慮 $a + b + 2ab = 67$ ，同乘以 2 可得 $4ab + 2a + 2b = 134$ ，因次分解可得

$$(2a + 1)(2b + 1) = 135 = 5 \times 17$$

因此 $(a, b) = (2, 13)$ ，故 $k = -12$ 。

{解二}

令方程式的兩根為 a 和 b 且 $a \leq b$ 。

由根與係數關係可得 $a + b = -2k - 9$ ，又 k 為整數，所以 $a + b$ 必為奇數，又質數中僅有 2 為偶數，所以 $a = 2$ 。令 $x = 2$ 代入方程式可得

$$4 + 4k + 18 + k + 38 = 0$$

故 $k = -12$ 。

