

2020 年欣榮圖書館數學比賽 (國中組)

1. (20 分) 有一個「疊加遊戲」規則是這樣的：先將大小相同的正方形左右對稱排列後進行堆疊，由上而下數，第一層有 1 個、第二層有 2 個、第三層有 3 個、...、第 n 層 n 個，再將正方形內填入數，使得左右相鄰兩個正方形內的兩數的「和」等於其中間上方正方形內的數。圖 (一) 與圖 (二) 分別是一個兩層與三層正方形堆疊的例子。

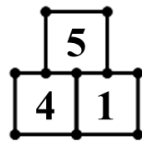


圖 (一)

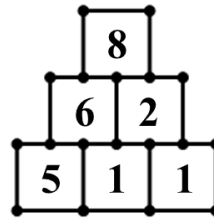


圖 (二)

- (i) 圖 (三) 是一個四層的正方形堆疊圖形，若最下層的四個數 a, b, c, d 皆為正整數 (數字可重複)，根據規則得出最上層正方形內的數為 40，則請問 $a + b + c + d$ 的最小值為何？最大值為何？請完整說明你的理由。

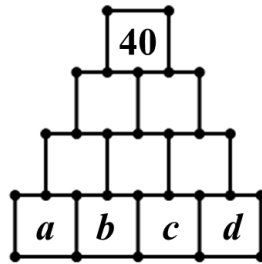


圖 (三)

- (ii) 圖 (四) 為一個五層的的正方形堆疊圖形，若最下層的五個數只能是 1 或 -1 ，根據規則得出最上層正方形內的數 A ，我們知道 A 有最小值 -16 、最大值 16 ，則在 -16 到 16 之中 (即 $-16, -15, \dots, 15, 16$) 中，請問 A 不可能 是那些數？請完整說明你的理由。

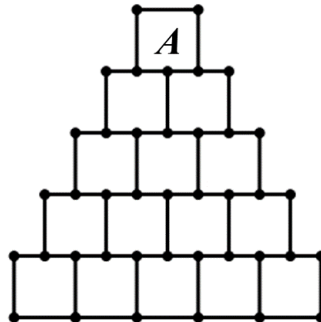


圖 (四)

【解】

- (i) (8 分)由規則可知 $a + 3b + 3c + d = a + b + c + d + 2(b + c) = 40$ ，所以可得當 $b + c$ 有最大值時， $a + b + c + d$ 有最小值，又 a, b, c, d 皆為正整數，因此取 $b + c = 12$ ，此時 $a + d = 4$ ，可得 $a + b + c + d$ 的最小值為 16。反之亦然，取 $b + c = 2$ ，此時 $a + d = 34$ ，可得 $a + b + c + d$ 的最大值為 36。
- (ii) (12 分)令最下層的五個數由左至右分別為 a, b, c, d, e ，由規則可知 $A = a + 4b + 6c + 4d + e$ ，又 a, b, c, d, e 為 1 或 -1 。考慮， $a = b = c = d = e = -1$ 時， A 有最小值為 -16 ，此時 a, b, c, d, e 任一個從 -1 變為 1 時， A 必為 -16 加上 2 的倍數，因此 A 不可能是奇數。再考慮 $a + 4b + 6c + 4d + e$ 中的係數，可得出 A 可能為 $\pm 16, \pm 14, \pm 12, \pm 8, \pm 6, \pm 4, \pm 2, 0$ ，注意到， ± 10 是做不到的。因此， A 不可能是 $\pm 15, \pm 13, \pm 11, \pm 9, \pm 7, \pm 5, \pm 3, \pm 1$ ，以及 ± 10 。
- (註：說明 A 不可能是奇數可得 8 分，不可能是 ± 10 則得 4 分)



2. (20 分)以下有兩個新月形的數學問題，請你仔細閱讀後進行思考與作答。

- (i) 圖 (五) 是一個半徑為 10 的圓形色紙，若將圓以弦 AB 為摺線進行摺疊，使得劣弧 AB 通過圓心 O 而成圖 (六)，其塗色區域形成一個新月形，如圖 (七) 所示，則塗色區域面積為何？(圓周率請用 π 表示)

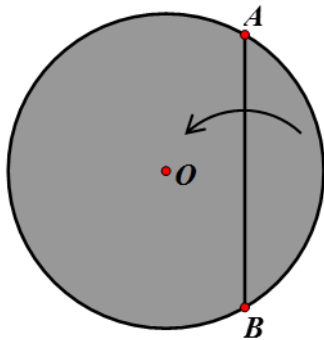


圖 (五)

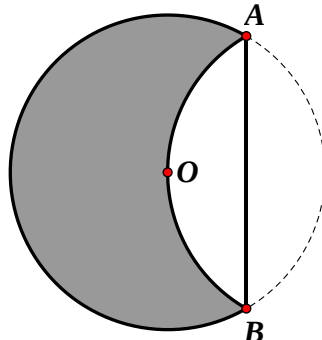


圖 (六)

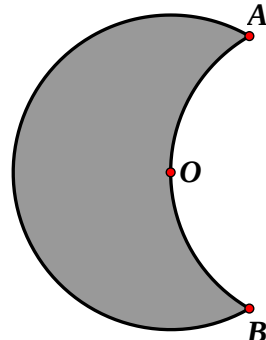


圖 (七)

- (ii) 圖 (八) 是由兩個大小不同的圓形色紙重疊而成之圖形，兩圓交於相異 C 與 D 兩點，且 E 點與 F 點皆分別在兩圓弧上，若角 CED 為 30° 度、角 CFD 為 45° 度，且優弧 CED 所在的大圓之半徑為 10，則塗色區域的新月形面積為何？

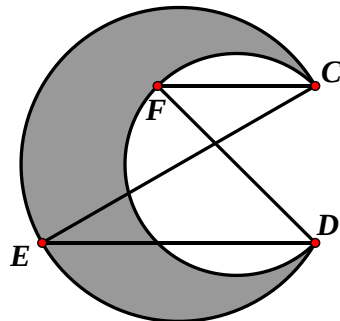


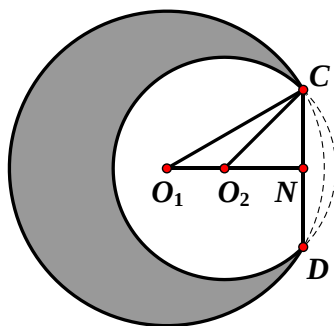
圖 (八)

【解】

- (i) (5 分) 令弦 AB 的中點為 M ，則 OM 是 AM 的中垂線，因為對摺後，劣弧 AB 通過圓心 O ，可得 $2OM = OA = 10$ ，即角 AOM 為 60 度，再得弦 AB 長為 $10\sqrt{3}$ 。因對稱，角 AOB 為 120 度。弓形 AB 面積為 $100\pi \times \frac{120}{360} - \frac{10\sqrt{3} \times 5}{2} = \frac{100}{3}\pi - 25\sqrt{3}$ ，所求塗色區域面積為 $100\pi - 2\left(\frac{100}{3}\pi - 25\sqrt{3}\right) = \frac{100}{3}\pi + 50\sqrt{3}$ 。

- (ii) (15 分) 令大圓圓心為 O_1 、小圓圓心為 O_2 ，因兩圓連心線必垂直平分公弦 CD ，再令直線 O_1O_2 交弦 CD 於 N 。角 CED 為 30 度，可得角 CO_1D 為 60 度（對同弧的圓周角與圓心角），同理可得角 CO_2D 為 90 度，所以角 CO_1N 為 30 度、角 CO_2N 為 45 度，在直角三角形 CO_1N 中，角 CO_1N 為 30 度，則線段 CN 為 $10 \times \frac{1}{2} = 5$ ，在直角三角形 CO_2N 中，角 CO_2N 為 45 度，則半徑 CO_2 為 $5\sqrt{2}$ 。即圓 O_1 的半徑為 10 、圓 O_2 的半徑為 $5\sqrt{2}$ 。

在圓 O_2 ，優弧 CD 所在的弓形面積為 $(5\sqrt{2})^2 \times \pi \times \frac{3}{4} + (5\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{75}{2}\pi + 25$ ，在圓 O_1 ，劣弧 CD 所在的弓形面積為 $10^2 \times \pi \times \frac{1}{6} - 10^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}$ ，所求塗色區域的新月形面積為 $100 \times \pi - \left(\frac{75}{2}\pi + 25\right) - \left(\frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}\right) = \frac{275}{6}\pi + 25\sqrt{3} - 25$ 。



3. (15 分)欣榮國中的七年級某班數學課堂中，老師複習因數與倍數單元，黑板寫了以下正確的內容：

$$4 = 1 \times 4 = 2 \times 2$$

正因數有 1、2、4

$$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$$

正因數有 1、2、3、4、6、12

- (i) 此時，阿智宣稱「在 1 到 100 的整數中，存在一個正整數其正因數個數是 11 個」。請你判斷阿智的宣稱是否正確？若正確，請你寫出此正整數。若不正確，請完整說明你的理由。
- (ii) 下課前，老師給了一個挑戰題：「在 1 到 1000 的整數中，有某一個奇數 x ，其正因數之和是一個三位數，這個三位數的末兩位是 81」，請求出此題中奇數 x 之值為何？(註：正因數之和，以 100 為例，其正因數之和為 $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 + 100 = 217$ ，其末兩位是 17)

【解】

- (i) (3 分)不正確。因為完全平方數的正因數個數為奇數個，但是 $1、4、9、16、25、36、49、64、81、100$ 沒有任何一個數的正因數是 11 個。
- (ii) (12 分)考慮奇數 x 的正因數有奇數個，還是偶數個。當 x 的正因數有偶數個時，其正因數之和為偶數 (偶數個奇數相加)，不符合條件；當 x 的正因數有奇數個時，其正因數之和為奇數 (奇數個奇數相加)，所以奇數 x 為完全平方數，檢驗 $1^2、3^2、5^2、\dots、31^2$ 中，符合所求的有 2 個數，19 和 25。
- (a) $19 \cdot 1 + 19 + 361 = 381$ 。
- (b) $25 \cdot 1 + 5 + 25 + 125 + 625 = 781$ 。

4.(20 分)圖 (九) 是兩個全等的三角形紙片 ABC 與 DEF ，其中邊 AB 等於邊 DE ，邊 BC 等於邊 EF ，邊 CA 等於邊 FD 且 I 點是三角形 ABC 的內心。
小榮與小欣分別都將三角形 ABC 與三角形 DEF 進行疊合，方法如下。

小榮將三角形 ABC 與三角形 DEF 進行疊合，使得 D 點與 I 點重合且兩個全等的三角形的三個對應邊分別平行，邊 BC 分別與邊 DE 、邊 DF 交於 G 和 H 點，如圖 (十) 所示。

小欣也將三角形 ABC 與三角形 DEF 進行疊合，使得 I 點在邊 EF 上且兩個全等的三角形的三個對應邊分別平行，邊 EF 分別和邊 AB 與邊 AC 交於 J 和 K 點，如圖 (十一) 所示。

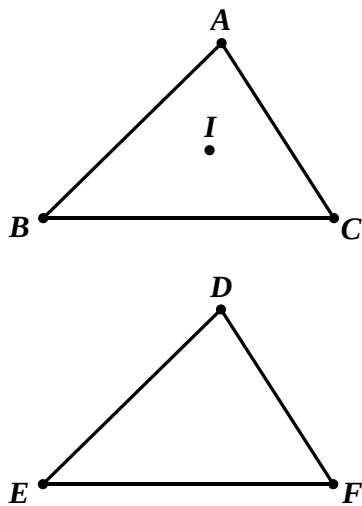


圖 (九)

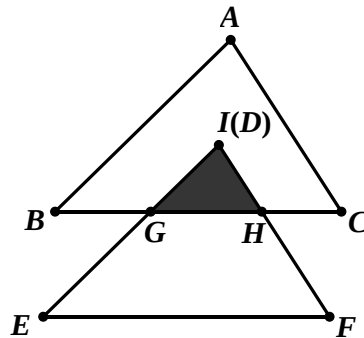


圖 (十)

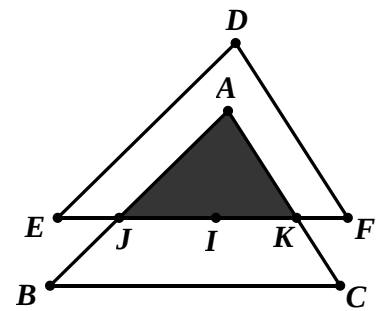


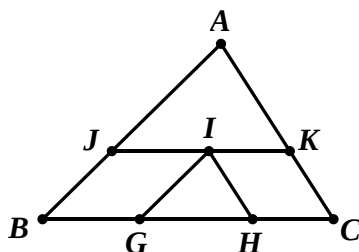
圖 (十一)

請證明：
$$\sqrt{\frac{\text{三角形 } IGH \text{ 的面積}}{\text{三角形 } AJK \text{ 的面積}}} = \frac{BC}{AB + AC}。$$

【解】

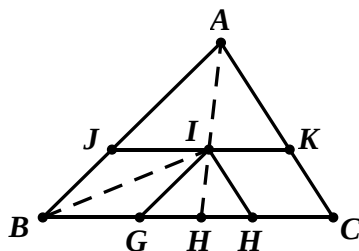
依題意可得三角形 IGH 相似於三角形 ABC 且三角形 AJK 相似於三角形 ABC ，
所以三角形 IGH 相似於三角形 AJK 且其對應邊分別平行。

考慮將兩個重疊部份的三角形構造到同一個三角形 ABC 中，如下圖。



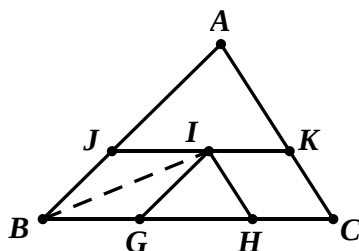
方法一：因為 I 點是三角形 ABC 的內心，作角 BAC 的角平分線 AH ，則線段 AH 也會是角 JAK 與角 GIH 的角平分線。連線段 BI ，在三角形 ABH 中， $AI : IH$ 等於 $BA : BH$ (內分比)，同理 $AI : IH$ 等於 $CA : CH$ ，所以 $AI : IH$ 等於 $(BA + CA) : BC$ ，又相似三角形的面積比等於角平分線長的平方比，因此我

們有
$$\sqrt{\frac{\text{三角形 } IGH \text{ 的面積}}{\text{三角形 } AJK \text{ 的面積}}} = \frac{IH}{AI} = \frac{BC}{AB+AC}。$$



方法二：連線段 BI ，因為 I 點是三角形 ABC 的內心，角 JBI 等於角 GBI ，又 JK 平行 BC ，可得角 JIB 等於角 GBI (內錯角)。因為角 JBI 等於角 JIB ，所以線段 JN 等於線段 JI ，同理可得線段 KI 等於線段 KC ，即三角形 AJK 的周長為 $AB + AC$ 。用相同的方法也可得出線段 GI 等於線段 GB 且線段 HI 等於線段 HC ，即三角形 IGH 的周長為 BC 。又相似三角形的面積比等於周長的平方比，因此我們有

$$\sqrt{\frac{\text{三角形 } IGH \text{ 的面積}}{\text{三角形 } AJK \text{ 的面積}}} = \frac{BC}{AB+AC}。$$



5. (20 分) 以下是兩道整除的問題，請你仔細閱讀後進行思考與作答。

(i) 若 2020 能夠整除 $x + 2019$ 且 x 是整數，則請你證明 2020 也能整除 $x - 1$ 。

(ii) 若 192 能整除 $y^3 + 191$ 且 y 是小於 2020 的正整數，則滿足前述條件的所有可能的正整數 y 有多少個？

(註：你可能會用到的乘法公式 $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$)

【解】

(i) (5 分) 令 $x + 2019 = 2020k$ ，其中 k 是整數，則 $x - 1 = x + 2019 - 2020 = 2020k - 2020 = 2020(k - 1)$ ，所以 2020 能整除 $x - 1$ 。

(ii) (15 分) $192|192$ 且 $192|y^3 + 191$ ，可得 $192|y^3 - 1$ ， $192 = 2^6 \times 3$

因為 $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ ，其中 y 是正整數

所以 $2^6|y^3 - 1$ 且 $3|y^3 - 1$

(a) 注意到，無論 y 的奇偶， $y^2 + y + 1$ 必為奇數，所以 $2^6|y - 1$

(b) $(y - 1)(y^2 + y + 1) = (y - 1)((y + 1)y + 1)$
 $= (y - 1) \times y \times (y + 1) + (y - 1)$

又 $(y - 1)$ 、 y 、 $(y + 1)$ 是連續三個整數，必有一數為 3 的倍數

所以 $3|y - 1$

因此 $2^6 \times 3|y - 1$ ，即 $192|y - 1$

滿足條件的所有可能的正整數 y 有 $1, 193, 385, \dots, 1921$ 共 11 個。

6.(15 分)若方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的兩根均為整數，而且 $a + b = 2020$ ，則試求此方程式的解。

【解】

設方程式的兩根為 h 和 k ，且 $h \geq k$ 。

由根與係數關係（韋達定理）得知 $h + k = -a$ 、 $hk = b$ 。因為 $a + b = 2020$ ，可得 $2020 = hk - h - k = (h - 1)(k - 1) - 1$ ，即 $(h - 1)(k - 1) = 2021$ ，又 $2021 = 1 \times 2021 = 43 \times 47$ ，所以 $(h, k) = (2022, 2)$ 、 $(48, 44)$ 、 $(0, -2020)$ 、 $(-42, -46)$ 。